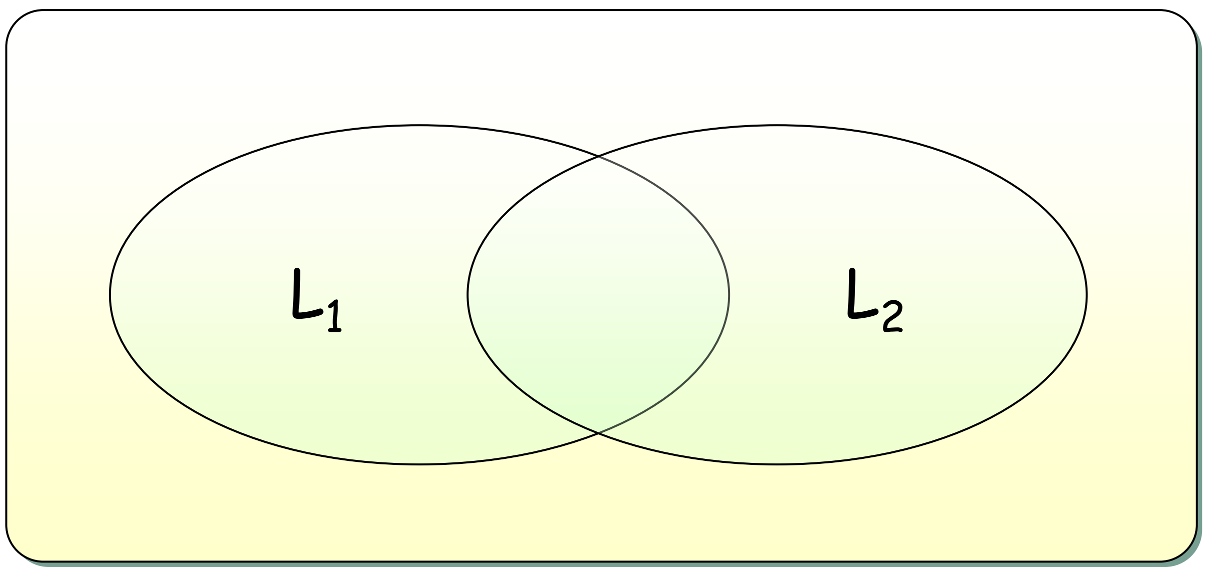
2.2 正規集合の演算

- アルファベットΣ上の正規集合の族

  $$\mathcal{R}(\Sigma) = \{L \mid L\text{は正規言語}\}$$

  は集合演算 $\cup$, $\cap$, $\overline{}$ のもとでブール代数をなす

$\mathcal{R}(\Sigma)$



補題 2.1

補題2.1

正規集合 L の補集合 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ は正規集合

証明

Lを受理するオートマトンを$M=(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$
とするとき, $\overline{M}=(K, \Sigma, \delta, q_0, K-F)$
とすると $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$ となる.

補題 2.2

補題2.2

$L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ を正規集合とする。

(1) $L_1 \cup L_2$は正規集合である。

(2) $L_1 \cap L_2$は正規集合である。

証明 (1)について証明する。

$L_1 = L(M_1)$、$M_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ とし、L_2に対してもM_2を定義する。M_1, M_2から次の遷移関数 δと受理状態Fをつくる。

$$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

$$(q_1 \in K_1, q_2 \in K_2, a \in \Sigma)$$

$$F = F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2$$

証明つづき

任意の $q_1 \in K_1$, $q_2 \in K_2$ に対して,

$\delta((q_1, q_2), e) = (\delta_1(q_1, e), \delta_2(q_2, e)) = (q_1, q_2)$

数学的帰納法のベースステップ

$\delta((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$ (仮定 $|x| \leqq k$)

$\delta((q_1, q_2), ax) = \delta(\delta((q_1, q_2), a), x)$ 定義より

$= \delta((\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)), x)$ 帰納法の仮定

$= (\delta_1(\delta_1(q_1, a), x), \delta_2(\delta_2(q_2, a), x))$ 帰納法の仮定

$= (\delta_1(q_1, ax), \delta_2(q_2, ax))$ 定義より

証明つづき

$x \in L(M) \Leftrightarrow \delta((q_0^1, q_0^2), x) \in F$

$\Leftrightarrow (\delta_1(q_0^1, x), \delta_2(q_0^2, x)) \in F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2$

$\Leftrightarrow \delta_1(q_0^1, x) \in F_1$ または $\delta_2(q_0^2, x) \in F_2$

$\Leftrightarrow x \in L(M_1) \cup L(M_2)$

(2)の証明は省略

(1)のときと、終状態の条件が違うだけ。