2.3 Nerode の定理

- Σ*上の関係 R は、
  $xRy \Rightarrow$ 任意の $z \in \Sigma^*$ に対して $xzRyz$
  を満たすとき右不変であるという。

- Σ*上の同値関係 R は、R による同値類の数が有限であるとき、有限指数であるという。

定理2.4（Nerodeの定理）

定理2.4

次の3つは同等である.

(1) 集合 $L \subseteq \Sigma^*$ は正規である。

(2) L はある有限指数で右不変な同値関係 R による同値類の和として表される。

(3) 関係 $\underset{L}{\equiv}$ は有限指数である。ただし$\underset{L}{\equiv}$は

$x \underset{L}{\equiv} y \Leftrightarrow$ 任意の $z \in \Sigma^*$ に対して

$xz, yz \in L$ であるか $xz, yz \notin L$ である。

「$xz \in L$ と $yz \in L$ が同等である」の意

証明 (1)⇒(2)

$L = L(M)$、$M=(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とし、関係 R を

$$xRy \Leftrightarrow \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

と定義すると、明らかに R は有限指数の同値関係である。
(L が R の同値類の和として表されることもほとんど自明)

あとはRが右不変であることをいえばよろしい

任意のx, y に対して $\delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y)$ であるので

$$\begin{aligned} xRy &\Rightarrow \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y) \\ &\Rightarrow \delta(\delta(q_0, x), z) = \delta(\delta(q_0, y), z) \\ &\Rightarrow \delta(q_0, xz) = \delta(q_0, yz) \\ &\Rightarrow xzRyz \end{aligned}$$

より、R は右不変である。

証明 (2)⇒(3)、(3)⇒(1)

(2)⇒(3) $xRy \Rightarrow xzRyz\ (z \in \Sigma^*) \Rightarrow (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$
$\Rightarrow x \underset{L}{\equiv} y$ 。 よって$\underset{L}{\equiv}$は有限指数。

(3)⇒(1) 同値関係$\underset{L}{\equiv}$のxを代表元とする同値類を[x]で表す。

$K' = \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$

$\delta'([x], a) = [xa]$　　δ' は代表元のとり方によらない

$q'_0 = [\varepsilon]$

$F' = \{[x] \mid x \in L\}$

とすると$\delta'(q'_0, x) = \delta'([\varepsilon], x) = [\varepsilon x] = [x]$ であるので

$x \in L(M') \Leftrightarrow [x] \in F' \Leftrightarrow x \in L$

ゆえに $L(M') = L$ である。L は有限オートマトンMで受理されるから正規

例2.2

Nerodeの定理は、ある言語 L が正規でないことを示すときに有効な道具となる。

$\Sigma=\{a, b\}$上の言語を $L=\{a^n b^n \mid n \geqq 0\}$ とする。

L を正規と仮定すると、Nerodeの定理より、
同値関係 $\equiv_L$ は有限指数となり、したがって、
$a^i \equiv a^j$ となる整数 i, j ($i<j$)が存在し、$\equiv_L$は右不変であるので $a^i b^i \equiv_L a^j b^i$ となるはずである。
ところがこれは成立しないので矛盾である。
すなわち、L は正規でない。