2.4 非決定性の有限オートマトン

- これまでのオートマトンは、文字 a と状態 q に対して δ(q, a)は一意に定まった。このようなオートマトンを決定性であるという。

非決定性のオートマトン

非決定性のオートマトンとは $M=(K, \Sigma, \delta, Q_0, F)$のことである。ただし $Q_0 \subset K$ で δ は $K \times \Sigma$ から 2^K への関数である。その他の要素は決定性と同様。

遷移関数と受理状態

非決定性の遷移関数の定義域を次のようにして $K\times\Sigma$ から $K\times\Sigma^*$へ拡張する。

$$\delta(q,\ \varepsilon) = \{q\}$$

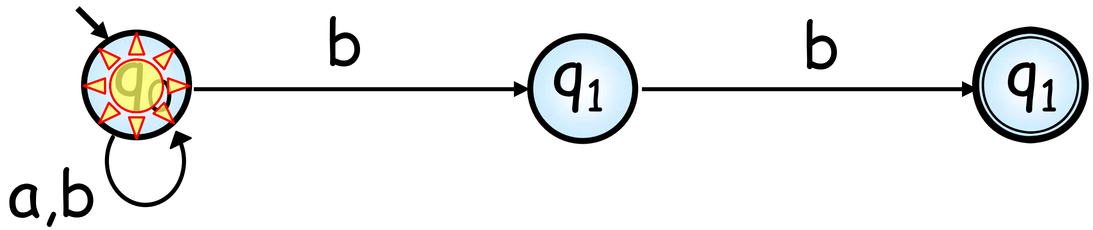
$$\delta(q, ax) = \bigcup_{p\in\delta(q,a)} \delta(p, x) \quad (q\in K, a\in\Sigma, x\in\Sigma^*)$$

これはさらに $2^K\times\Sigma^*$ に拡張される。

$$\delta(S, x) = \bigcup_{q\in S} \delta(q, x)$$

そして, $x\in\Sigma^*$ が M によって受理されるとは、
$\delta(Q_0, x)\cap F \neq \Phi$ であることをいう。

例2.3



非決定性有限オートマトンの状態遷移図

例えば abb に対しては $\delta(q_0, abb) = \delta(q_0, bb)$

$= \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b)$

$= \{q_0\} \cup \{q_1\} \cup \{q_2\}$

$= \{q_0, q_1, q_2\}$

となり $q_2 \in F$ であるから $abb \in L(M)$ である。

定理2.5

定義より、決定性の有限オートマトンは $|\delta(q, a)| = 1$ であるような非決定性オートマトンの特別な場合である。しかしながらこれらのオートマトンの**能力には差はない**ことが示される。

定理2.5

$L \subseteq \Sigma^*$ が正規であるための必要十分条件は, L が非決定性の有限オートマトンによって受理されることである。

証明の方針

任意の非決定性のM に対して、$L(M) = L(M')$ となる決定性のM' を構成できることを示せば十分である。

定理2.5の証明

非決定性の有限オートマトン $M=(K, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ を考える。

ポイント！

Kの任意の部分集合に1つの状態を割り当て、
それらに対して次の決定性のM'をつくる。

$$K' = 2^K$$

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

$$q'_0 = Q_0$$

$$F' = \{R \mid R \in K' \text{ かつ } R \cap F \neq \Phi\}$$

このオートマトンは M の状態の集合を1つの状態とみなして ($\{q_1, q_2, \ldots, q_k\} = p$ という具合に) 書き直しただけであり、$L(M) = L(M')$ が成立することはすぐに分かる。

例2.4

例2.3 の非決定性オートマトンMに対して、証明の方法に従って M′ を構成すると以下のようになる.

$K=\{\Phi, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$

$q'_0=\{q_0\}$

$F=\{\{q_2\},\{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$