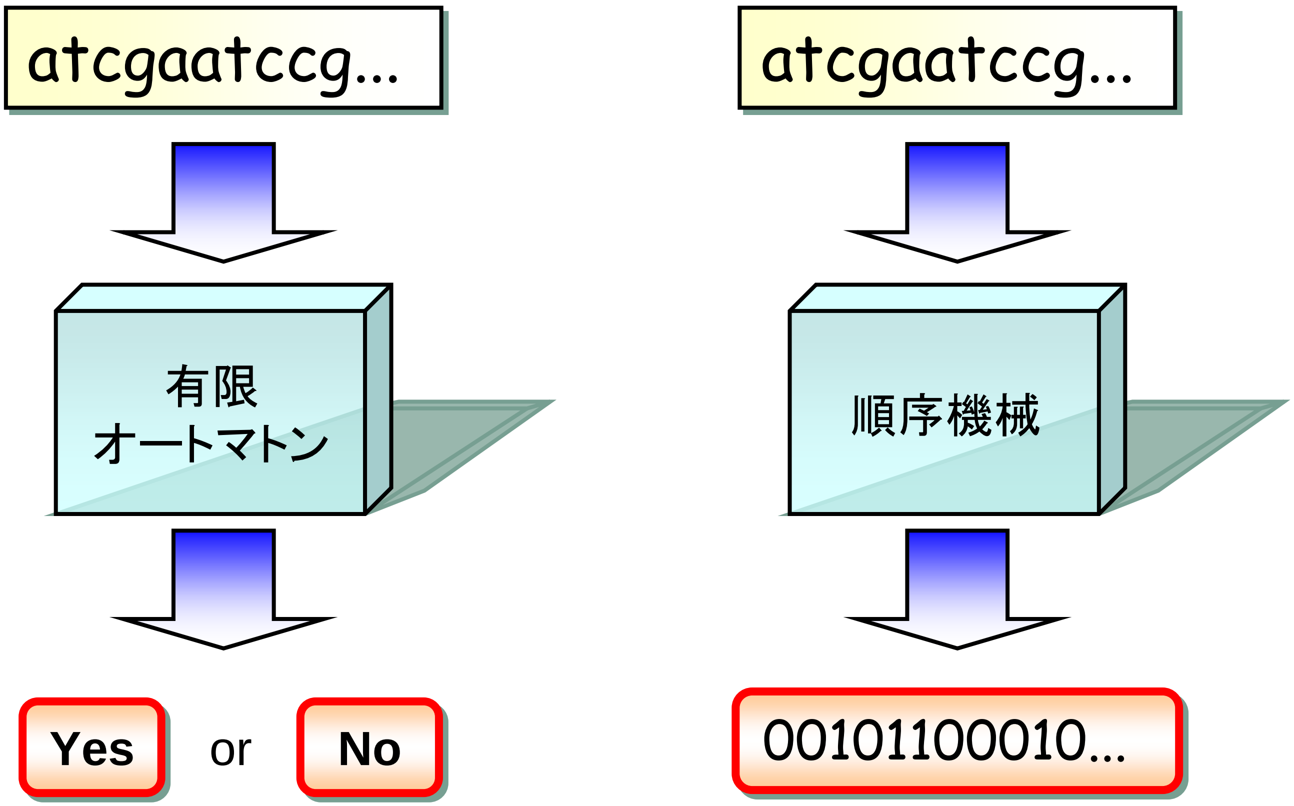
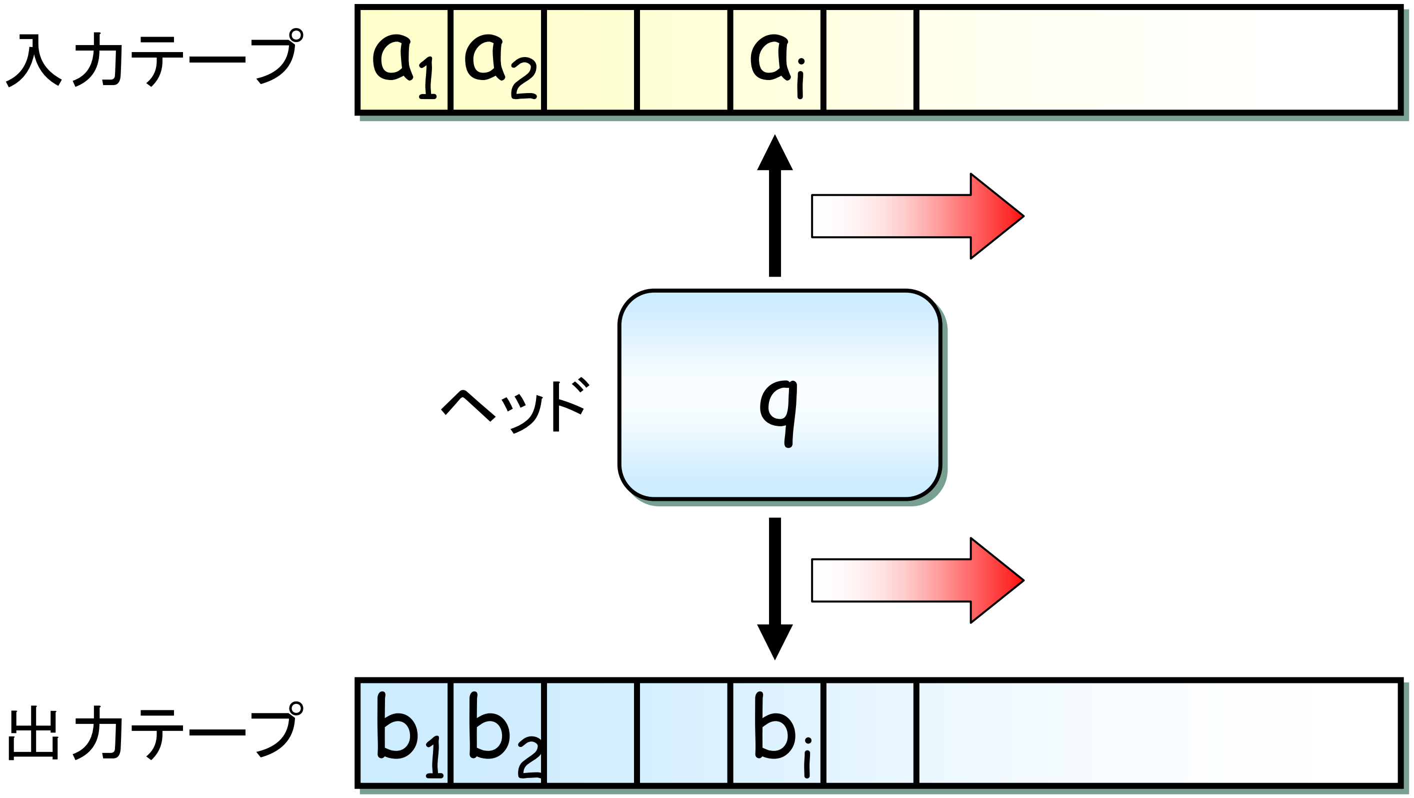
2.6 順序機械と状態最小化

順序機械とは



順序機械の概念図



順序機械の数学的定義

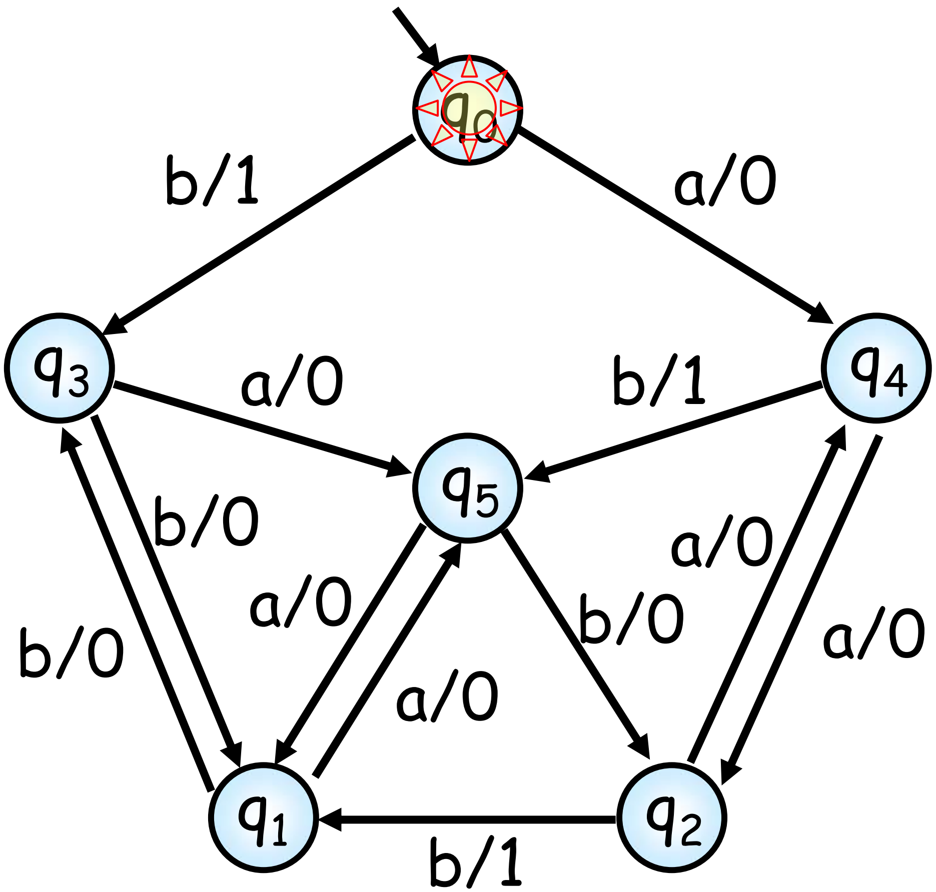
- 順序機械は、5つ組 $S=(K,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda)$
  - K: 状態の(空でない)集合
  - Σ: 入力アルファベット
  - Δ: 出力アルファベット
  - δ: 遷移関数 $K\times\Sigma\rightarrow K$ $(K\times\Sigma^*\rightarrow K)$
  - λ: 出力関数 $K\times\Sigma\rightarrow\Delta$ $(K\times\Sigma^*\rightarrow\Delta^*)$
  - (本当はスタート地点を表す q_0 もいる)

$$\lambda(q,\varepsilon)=\varepsilon \qquad (q\in K)$$

$$\lambda(q,ax)=\lambda(q,a)\lambda(\delta(q,a),x)$$

$$(q\in K, a\in\Sigma, x\in\Sigma^*)$$

例2.8（図2.11）



$\lambda(q_0, abb)$

$= \lambda(q_0, a)\lambda(\delta(q_0,a), bb)$

$= 0\,\lambda(q_4, bb)$

$= 0\,\lambda(q_4, b)\lambda(\delta(q_4,b), b)$

$= 01\,\lambda(q_5, b)$

$= 010$

一般順序機械

- 一般順序機械とは
  - 順序機械の出力関数を
    $K \times \Sigma \to \Delta^*$ に拡張したもの
  - 一般順序機械 $S = (K, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ に対して
    $S(x) = \lambda(q_0, x) \quad (x \in \Sigma^*)$
- gsm写像

  $L \subseteq \Sigma^*$に対して

  $S(L) = \{\lambda(q_0, x) \mid x \in L\}$

語 x の S による変換

Σ^*上の言語からΔ^*上の言語への翻訳を意味する

同値・等価・既約

- $S_i=(K_i, \Sigma, \Delta, \delta_i, \lambda_i)$ (i=1,2) について
  - 状態 $p \in K_1$ と $q \in K_2$ は、任意の x に対して $\lambda_1(p, x) = \lambda_2(q, x)$ であるとき同値といい $p \equiv q$ とかく （$p \equiv q$ ならば $\delta_1(p,x) \equiv \delta_2(q,x)$） 補題2.13
  - S_1 と S_2 は任意の $p \in K_1$ に対して $p \equiv q$ となる $q \in K_2$ が存在し、その逆も成り立つとき等価であるといい $S_1 \equiv S_2$ とかく
- $S=(K, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ は
  - 任意の $p, q \in K$ に対して $p \equiv q$ ならば $p=q$ であるとき既約であるという

定理2.14

定理2.14

任意の順序機械 S に対して $S \equiv S'$ となる
既約な順序機械 S' が存在する

証明

[p] を ≡ による p を含む同値類として、
これを状態とする順序機械を構成する
(略:教科書p25)

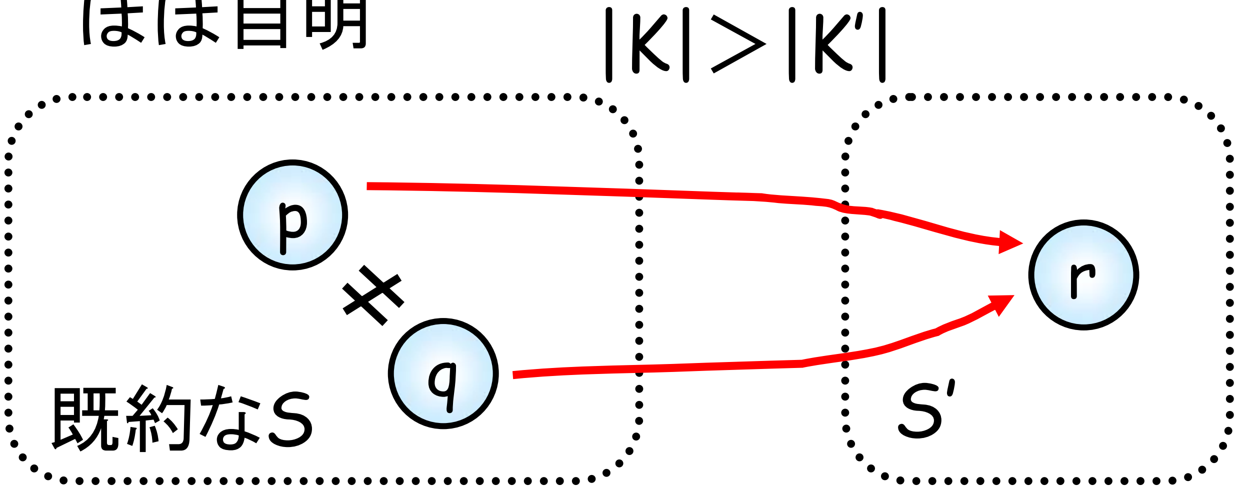
定理2.15

定理2.15

既約な順序機械は、それと等価な順序機械のうちで、状態数が最小である

証明

ほぼ自明



$p \equiv r,\ q \equiv r$

$\Downarrow$

$p \equiv q$

矛盾!

順序機械の状態を最小にする手順

- 等価で既約な S' を作ればよい
  - 定理2.14 →既約なものが存在することを保証

- k同値
  - $\lambda(p,x)=\lambda(q,x)$がすべての$|x|\leqq k$なる$x\in\Sigma^*$に対して成り立つとき、p と q は **k同値**であるといい $p\overset{k}{\equiv}q$ とかく
  - C_k を $\overset{k}{\equiv}$ による K の同値類の集合とする

定理2.16

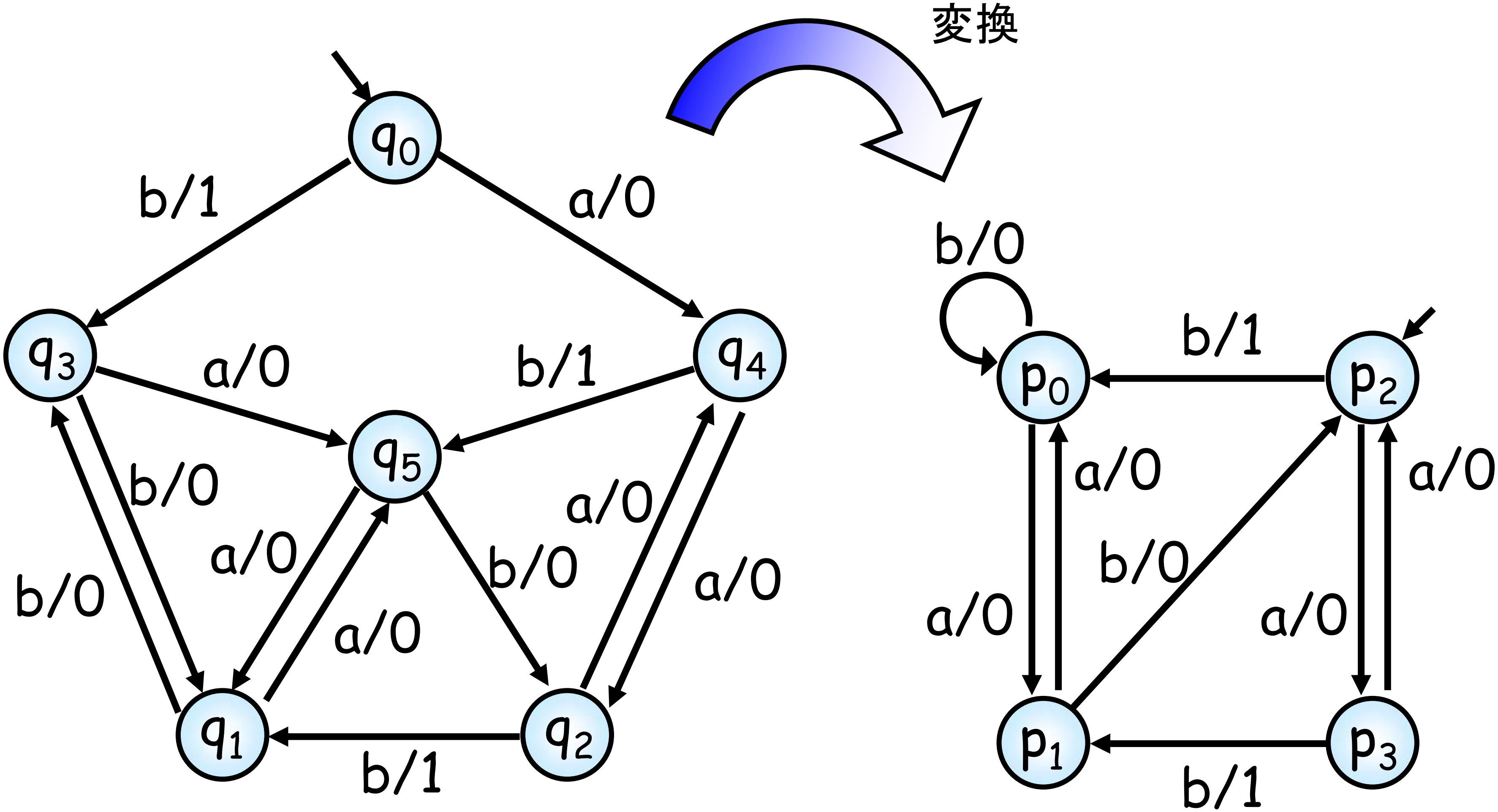
定理2.16

順序機械 $S=(K,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda)$ に対して次の関係が成立する

1. $p \overset{k+1}{\equiv} q$ であるための必要十分条件は、$p \overset{k}{\equiv} q$ かつ任意の $a \in \Sigma$ に対して $\delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(q,a)$ となること
2. $C_{k+1}=C_k$ ならば $j \geqq k$ なるすべての j に対して $C_k=C_j$
3. $C_{k+1}=C_k$ であれば、$p \equiv q$ となる必要十分条件は $p \overset{k}{\equiv} q$
4. $|C_1|=1$ ならば、$C_2 = C_1$
5. $n=|K| \geqq 2$ ならば、$C_n = C_{n-1}$

k=1,2,…,n の順に C_k を計算していくと、必ず $C_{k+1} = C_k$ となる k が求まり、このとき C_k は≡による同値類の集合に等しい

例2.9



変換
q0
q1
q2
q3
q4
q5
b/1
a/0
a/0
b/1
b/0
a/0
b/0
a/0
a/0
b/0
a/0
a/0
b/1
b/0
p0
p1
p2
p3
b/1
a/0
a/0
b/0
a/0
a/0
b/1

有限オートマトンの状態最小化のしかた

- 有限オートマトン M に等価で、状態数が最小
  - Nerodeの定理より、同値関係 $\underset{L}{\equiv}$ のもとで同値類を状態にもつ有限オートマトン M′
- 状態を最小化する手順
  - 定理2.17（定理2.16とほぼ同じ）による
  - 具体的には
    - 離れ小島になっている状態を削除
    - 同値関係 $\overset{k}{\equiv}$ による同値類 C_k を計算する
      ここで関係 $\overset{k}{\equiv}$ は
      $p \overset{k}{\equiv} q \Leftrightarrow$ 任意の$|x| \leqq k$ なる $x \in \Sigma^*$ に対して
      $\delta(p, x) \in F \longleftrightarrow \delta(q, x) \in F$

例2.10