

3.3 文脈自由文法とPDA

定理3.4

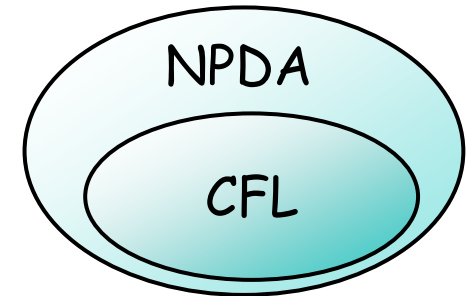
- **CFL = NPDA**
 - 文脈自由言語のクラスと非決定性プッシュダウンオートマトンによって受理される言語のクラスは一致する。

- 2つの補題に分けてこの定理を証明する。
 - 補題3.5 $CFL \subseteq NPDA$
 - 補題3.6 $NPDA \subseteq CFL$

補題3.5 $CFL \subseteq NPDA$

■ この補題の意味

- 任意の言語 $L \in CFL$ について、
 $L \in NPDA$ (L を受理する npda がある)



■ 証明のアイデア

- $L \in CFL$ とし、 $L \subseteq \Sigma^*$ を生成する文脈自由文法を $G = (N, \Sigma, P, S)$ とする
- この G に対応する npda M をつくり、
 $L(G) = N(M)$ となることを示せばよい

補題3.5の証明 (1)

- 言語 L を最終状態と空ストアで受理する npda $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ を次のように定義
 - $K = \{q_0\}$
 - $\Gamma = N \cup \Sigma$
 - q_0 が初期状態
 - $S \in N$ が初期記号 Z_0
 - $F = \{q_0\}$
 - 遷移関係 δ は次のように与えられる。
 - (i) $\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, \alpha) \mid A \rightarrow \alpha \in P\}$
 - (ii) $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ (ただし $a \in \Sigma$)

注:これは、文脈自由文法から等価なPDAを作る手法になる！

補題3.5の証明 (2)

■ $L(G) = N(M)$ を証明するぞ！

□ まずは $X \in N, u \in \Sigma^*, \alpha \in N(N \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$ とするとき次の (a) (b) が同値であることを示す。

(a) 最左導出 $X \xRightarrow{*} u\alpha$ がある。

(b) $(q_0, u, X) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \alpha)$ となる。

入力から u を消費してストアの X を α に変える

□ (a) \Rightarrow (b) (導出の長さについての帰納法)

■ 長さが 0 のときは $u = \varepsilon, \alpha = X$ であるので自明。

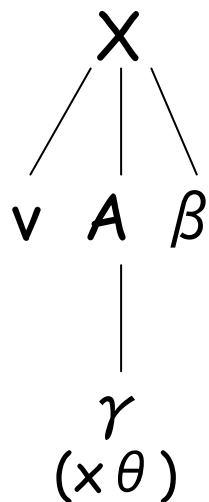
■ 最左導出の長さが n のとき成立すると仮定する。

このとき長さ $n+1$ の最左導出

$$X \xRightarrow{n+1} u\alpha$$

をとる。ただし $u \in \Sigma^*, \alpha \in (N \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$ とする。

補題3.5の証明 (3)



この最左導出は、

$$X \xRightarrow{n} vA\beta \Rightarrow v\gamma\beta \quad (\text{ただし } v \in \Sigma^*, A \rightarrow \gamma \in P)$$

のように、長さ n の最左導出と、長さ 1 の最左導出に分解できる。

ここで $u = vx$, $x \in \Sigma^*$, $\gamma\beta = x\alpha$ と書ける。帰納法の仮定より

$$(q_0, v, X) \vdash^* (q_0, \varepsilon, A\beta)$$

となる。したがって

$$(q_0, vx, X) \vdash^* (q_0, x, A\beta)$$

$$\vdash (q_0, x, x\alpha) \quad ((i)\text{の遷移と } \gamma\beta = x\alpha \text{ による})$$

$$\vdash^* (q_0, \varepsilon, \alpha) \quad ((ii)\text{の遷移による})$$

このようにして $(q_0, u, X) \vdash (q_0, \varepsilon, \alpha)$ となる。

よって $(a) \Rightarrow (b)$ が成り立つ。

補題3.5の証明 (4)

□ (b)⇒(a)の証明

- 計算のステップ数についての帰納法で証明する。
- ステップ数が 0 の場合は自明。
- ステップ数が n 以下のとき成立すると仮定する。長さ $n+1$ の計算

$(q_0, u_0, a_0) \vdash \cdots \vdash (q_0, u_n, a_n) \vdash (q_0, u_{n+1}, a_{n+1})$
をとる。ただし $u_0 = u, u_{n+1} = \varepsilon, a_0 = X, a_{n+1} = a$ とする。

- $n+1$ 番目のステップで (i) の遷移 (ε 動作) が使われている場合:

上の計算は

$(q_0, u, X) \vdash^n (q_0, \varepsilon, A\beta) \vdash (q_0, \varepsilon, \gamma\beta)$
と分解できる。ただし $A \rightarrow \gamma \in P, \gamma\beta = \alpha$ である。

帰納法の仮定により、最左導出

$$X \xrightarrow{*} uA\beta$$

が存在する。 $A \rightarrow \gamma \in P$ であり、また $u \in \Sigma^*$ だから、

$$X \xrightarrow{*} uA\beta \Rightarrow u\gamma\beta$$

は最左導出である。

よって $X \xrightarrow{*} u\alpha$ なる最左導出が存在する。

補題3.5の証明 (5)

- $n+1$ 番目のステップで (ii) の遷移が使われている場合:
 X は非終端記号なので、第1ステップ目では (ii) の遷移を適用できない。
 したがって、ある時点 $m(2 \leq m \leq n+1)$ が存在して、 $m-1$ ステップ目では (i)の遷移が使われ、すべての $t(m \leq t \leq n+1)$ に対して t ステップ目では (ii) の遷移が適応されている。

- すると、計算 $(q_0, u, X) \vdash^{n+1} (q_0, \varepsilon, \alpha)$ は ($u = vx$ とおくと)

$$\begin{aligned} & (q_0, vx, X) \vdash^{m-2} (q_0, x, A\beta) \\ & \quad \vdash (q_0, x, \gamma\beta) \quad \text{(m-1回目の遷移は(i)の遷移)} \\ & \quad \vdash^{n-m+2} (q_0, \varepsilon, \alpha) \quad \text{(残りはすべて(ii)の遷移)} \end{aligned}$$

と分解できる。また $(q_0, vx, X) \vdash^{m-2} (q_0, x, A\beta)$ ならば
 $(q_0, v, X) \vdash^{m-2} (q_0, \varepsilon, A\beta)$ であるので、帰納法の仮定より最左導出

$$X \overset{*}{\Rightarrow} vA\beta$$

が存在する。すると  (m-1回目の遷移に対応)

$$X \overset{*}{\Rightarrow} vA\beta \Rightarrow v\gamma\beta$$

は最左導出である。

$\gamma\beta = x\alpha, vx = u$ であるので $X \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha$ があることになる。

補題3.5の証明 (6)

- 以上により (a) と (b) が同値であることがわかった。
 - (a) 最左導出 $X \xRightarrow{*} u\alpha$ がある。
 - (b) $(q_0, u, X) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \alpha)$ となる。
- 補題3.1より、 G の導出は最左導出としておいてよいので、 $w \in \Sigma^*$ に対して
$$S \xRightarrow{*} w \iff (q_0, w, S) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$
となる。したがって $L(G) = N(M)$ となる。
命題3.2より $L \in NPDA$ となる。 【証明終】

補題3.1

$G = (N, \Sigma, P, S)$ を文脈自由文法とする。導出 $u \xRightarrow{*} v$ があるならば、 u から v への最左導出がある。

例3.13

■ 文脈自由文法 $G = (N, \Sigma, P, S)$ を

□ $N = \{S\}$

□ $\Sigma = \{a, b\}$

□ $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\}$

とする。このとき補題3.5で構成されるnpdaの遷移関数 δ は次のようになる

現在の状態

入力ヘッドが見ている記号

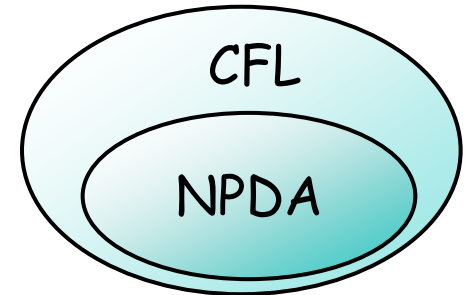
スタアのヘッドが見ている記号

	q	x	Z	$\delta(q, x, Z)$
q_0		ε	S	$\{(q_0, aSb), (q_0, ab)\}$
q_0		a	a	$\{(q_0, \varepsilon)\}$
q_0		b	b	$\{(q_0, \varepsilon)\}$

補題3.6 $NPDA \subseteq CFL$

■ この補題の意味

- 任意の言語 $L \in NPDA$ について、
 $L \in CFL$ (L を導出する CFL がある)



■ 証明のアイデア

- $L \in NPDA$ とし、この L を最終状態と空ストアで受理する $npda$ を $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ とする
- この M に対応する文脈自由文法 G をつくり、
 $N(M) = L(G)$ となることを示せばよい

補題3.6の証明 (1)

- L を生成する文脈自由文法 $G=(N, \Sigma, P, S)$ を次のように定義

- $N = (K \times \Gamma \times K) \cup \{S\}$

- P は次の生成規則よりなる

- (i) 各 $p \in F$ に対して $S \rightarrow (q_0, Z_0, p)$ は生成規則である。

- (ii) $(p, Z_1 \cdots Z_k) \in \delta(q, a, Z)$ ($k \geq 1, a \in S \cup \{\varepsilon\}$) のとき
任意の $q_1, q_2, \dots, q_k \in K$ に対して

- $(q, Z, q_k) \rightarrow a(p, Z_1, q_1)(q_1, Z_2, q_2) \cdots (q_{k-1}, Z_k, q_k)$
は生成規則である

- (iii) $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, Z)$ ($a \in S \cup \{\varepsilon\}$) のとき
 $(q, Z, p) \rightarrow a$ は生成規則

注:これは、PDAから等価な文脈自由文法を作る手法になる！

補題3.6の証明 (2)

- $L(G) = N(M)$ を証明するぞ！
 - その前に、次の (a) (b) が同値であることを示す。
 - (a) $(q, Z, p) \Rightarrow^* x$
 - (b) $(q, x, Z) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$
 - (a) \Rightarrow (b)の証明(導出の長さについての帰納法で証明)
 - 長さが1のときは、生成規則 (iii) により
$$x \in S \cup \{\varepsilon\} \text{ で } (p, \varepsilon) \in d(q, x, Z)$$
となっている。したがって $(q, x, Z) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$ となる。
長さ n 以下の導出に対して成立することを仮定する。
 - 長さ $n+1 \geq 2$ の導出
$$(q, Z, p) \Rightarrow x$$
をとる。導出の長さが2以上だから一番初めに適用される生成規則は (ii) の形のものである。

補題3.6の証明 (3)

このとき上の導出は

$$(q, Z, p) \Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2)(q_2, Z_2, q_3) \cdots (q_k, Z_k, p) \xrightarrow{*} x$$

と書ける。ただし $(q_1, Z_1 \cdots Z_k) \in d(q, a, Z)$ である。

すると、 $x = ax_1 \cdots x_k$ ($x_i \in \Sigma^*$) と書けて、各 i ($1 \leq i \leq k$) に対して、長さ n 以下の導出で

$$(q_i, Z_i, q_{i+1}) \xrightarrow{*} x_i$$

となる。ただし $q_{k+1} = p$ とする。

帰納法の仮定より

$$(q_i, x_i, Z_i) \vdash (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \quad (1 \leq i \leq k)$$

となる。このとき

$$(q_i, x_i, Z_i) \vdash (q_1, x_1 \cdots x_k, Z_1 \cdots Z_k)$$

$$\vdash^* (q_2, x_2 \cdots x_k, Z_2 \cdots Z_k)$$

...

$$\vdash^* (q_k, x_k, Z_k)$$

$$\vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

となる。

補題3.6の証明 (4)

□ (b)⇒(a)の証明(計算のステップ数についての帰納法)

■ (iii) より $(q, Z, p) \rightarrow x$ は P の要素となる。

よってステップ数が 1 のときは成立する。 $n+1 \geq 2$ として

$$(q, x, Z) \vdash^{n+1} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

とする。これを最初の1ステップと残りの n ステップに分解する。

$n \geq 1$ だから第 1 ステップでは Z がポップされて ε に置き換えられることはない。よって

$$(q, x, Z) \vdash (r, y, Z_1 \cdots Z_k) \\ \vdash^n (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

となる。ここで $x = ay$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ であり、

$(r, Z_1 \cdots Z_k) \in \delta(q, a, Z)$ である。

補題3.6の証明 (5)

- 各 Z_i はいずれポップされるので、
分解 $y = y_1 \cdots y_k$ ($y_i \in \Sigma^*$, $1 \leq i \leq k$) と状態 $q_1 \cdots q_k$ が存在して、
各 i ($1 \leq i \leq k$) に対して、 n 以下のステップ数で

$$(q_i, y_i, Z_i) \vdash^* (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon)$$

となる。ただし $q_1 = r$, $q_{k+1} = p$ とする。

帰納法の仮定より

$$(q_i, Z_i, q_{i+1}) \Rightarrow^* y_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

となる。(ii)より

$$(q, Z, p) \Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2) \cdots (q_k, Z_k, p)$$

だから

$$\begin{aligned} (q, Z, p) &\Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2) \cdots (q_k, Z_k, p) \\ &\Rightarrow^* ay_1 \cdots y_k \end{aligned}$$

となる。よって $(q, Z, p) \Rightarrow^* x$ となる。

補題3.6の証明 (6)

- 以上により (a) と (b) が同値であることがわかった。

$$(a) (q, Z, p) \stackrel{*}{\Rightarrow} x$$

$$(b) (q, x, Z) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

- そこで $x \in \Sigma^*$ に対して $S \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ ならば (i) により、ある状態 $p \in F$ が存在して、 $S \Rightarrow (q_0, Z_0, p) \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ となる。したがって

$$(q_0, x, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

となり、 x は M によって受理される。

逆に x が M によって受理されれば、

$S \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ となることも同様にわかる。

【証明終】

例3.14

- $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ を言語 $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を最終状態と空ストアで受理する例3.12の npda とする。このとき補題3.6で構成される文脈自由文法 $G = (N, S, P, S)$ は次のようになる。

$$N = \{q_0, q_1\} \times \{A, Z_0\} \times \{q_0, q_1\} \cup \{S\}$$

P の生成規則は次のとおり。

$$S \rightarrow (q_0, Z_0, q_1)$$

$$(q_0, Z_0, q_0) \rightarrow a(q_0, A, q_0)$$

$$(q_0, Z_0, q_1) \rightarrow a(q_0, A, q_1)$$

$$(q_0, A, q_0) \rightarrow a(q_0, A, q_0) (q_0, A, q_0)$$

$$(q_0, A, q_0) \rightarrow a(q_0, A, q_1) (q_1, A, q_0)$$

$$(q_0, A, q_1) \rightarrow a(q_0, A, q_0) (q_0, A, q_1)$$

$$(q_0, A, q_1) \rightarrow a(q_0, A, q_1) (q_1, A, q_1)$$

$$(q_0, A, q_1) \rightarrow b$$

$$(q_0, A, q_1) \rightarrow b$$

無駄な生成規則が多いよ (・▽・)

3.3節の結論

- 以下の補題が証明された
 - 補題3.5 $CFL \subseteq NPDA$
 - 補題3.6 $NPDA \subseteq CFL$
- すなわち

定理3.4

$$CFL = NPDA$$

- 文脈自由言語のクラスと非決定性プッシュダウンオートマトンによって受理される言語のクラスは一致する。(言語を定義する能力が等しい)