n進法

n進法(1)

日常生活で使われているのは**10進法**である．10進法は，各桁を 0, 1, 2, ..., 9 とカウントアップし，その桁が10になる直前に上位の桁をカウントアップし，自桁を 0 にリセットする数え方である．

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
				・・・					
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

n進法(2)

n進法は，各桁を 0, 1, 2, ..., n–1 とカウントアップし，その桁が n になる直前に上位の桁をカウントアップし，自桁を 0 にリセットする数え方である．（nを**基数**と呼ぶ．）

例: 4進法

0	1	2	3	200	201	202	203	1000
10	11	12	13	210	211	212	213	
20	21	22	23	220	221	222	223	
30	31	32	33	230	231	232	233	
100	101	102	103	300	301	302	303	
110	111	112	113	310	311	312	313	
120	121	122	123	320	321	322	323	
130	131	132	133	330	331	332	333	

n進法(3)

アラビア数字は0から 9 までの10種類しかなく, 11進法以上では文字が不足するので, 代わりに A, B, C, ... のアルファベットを使用して数える.

例: 16進法

0	1	2	3	…	9	A	B	…	F
10	11	12	13	…	19	1A	1B	…	1F
20	21	22	23	…	29	2A	2B	…	2F
				…					
90	91	92	93	…	99	9A	9B	…	9F
A0	A1	A2	A3	…	A9	AA	AB	…	AF
				…					
F0	F1	F2	F3	…	F9	FA	FB	…	FF

n進法から10進法への変換

① $365.25_{(10)} = 3 * 10^{2} + 6 * 10^{1} + 5 * 10^{0} + 2 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2}$
$= 365.25_{(10)}$

② $101.01_{(2)} = 1 * 2^{2} + 0 * 2^{1} + 1 * 2^{0} + 0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2}$
$= 5.25_{(10)}$

③ $125.34_{(8)} = 1 * 8^{2} + 2 * 8^{1} + 5 * 8^{0} + 3 * 8^{-1} + 4 * 8^{-2}$
$= 85.4375_{(10)}$

④ $2AD.C_{(16)} = 2 * 16^{2} + A * 16^{1} + D * 16^{0} + C * 16^{-1}$
$= 2 * 16^{2} + 10 * 16^{1} + 13 * 16^{0} + 12 * 16^{-1}$
$= 685.75_{(10)}$

10進法からn進法への変換(1)

整数部の変換: 商が 0 になるまで n で割り続け，得られた余りを逆順に並べる.

①$85_{(10)}$

$85 \div 8 = 10 \ldots 5$

$10 \div 8 = 1 \ldots 2$

$1 \div 8 = 0 \ldots 1$

（答）$125_{(8)}$

②$685_{(10)}$

$685 \div 16 = 42 \ldots 13$ つまり D

$42 \div 16 = 2 \ldots 10$ つまり A

$2 \div 16 = 0 \ldots 2$

（答）$2AD_{(16)}$

応用問題①: なぜ上記の計算で基数の変換が正しくできるのか証明を示せ.

10進法からn進法への変換（2）

小数部の変換: 小数部が 0 になるまで，小数部に n を掛け続ける．得られた積の整数部を順に並べる．

① $0.578125_{(10)}$

$0.578125 * 8 = 4.625$

$0.625 * 8 = 5.0$

（答）$0.45_{(8)}$

② $0.7890625_{(10)}$

$0.7890625 * 16 = 12.625$

$0.625 * 16 = 10.0$

12つまりC，10つまりA

（答）$0.CA_{(16)}$

応用問題②: なぜ上記の計算で基数の変換が正しくできるのか証明を示せ．

10進法からn進法への変換(3)

常に有限小数に基数変換できる保証はない．（無限小数になることもある．）

$0.1_{(10)}$

$0.1 * 2 = 0.2$

$0.2 * 2 = 0.4$

$0.4 * 2 = 0.8$

$0.8 * 2 = 1.6$

$0.6 * 2 = 1.2$

$0.2 * 2 = 0.4$

…

（答）$0.0001\ 1001\ 1001\ 1001\ldots_{(2)}$

応用問題③: 上記の無限2進小数が$0.1_{(10)}$を表していることを証明せよ.

10進法からn進法への変換（4）

$685.7890625_{(10)}$

685

0.7890625

685 ÷ 16

= 42 ... 13 つまり D

42 ÷ 16

= 2 ... 10 つまり A

2 ÷ 16

= 0 ... 2

0.7890625 * 16

= 12.625

0.625 * 16

= 10.0

12つまりC, 10つまりA

2AD

.CA

$2AD.CA_{(16)}$

2進法

- 今日のコンピュータはあらゆるデータを2進法で表現し，1と0をそれぞれ電圧の有無に対応させ，データの加工と記憶を電子回路によって行う.
- 2進法における1桁を**ビット(bit = binary digit)**という. 一般に8ビットを1バイトという.
- 2進法でも「メートル法」を用いる. 10進法では1000がキロ(K), 1000^2がメガ(M), 1000^3がギガ(G)になるが, 1000 は2進法では切りが悪い数字である. 代わりに 1024 (= 2^{10})をキロ(K), 1024^2をメガ(M), 1024^3をギガ(G)とする.
- 2進数は書くと長くなる(255を表すのに8桁も必要！)ため, プログラムでは2進数からの変換が容易な16進数や8進数が使用される. 今日は16進数での記述が主流.

16進法と8進法

- 2進数の4ビット（3ビット） は16進数（8進数）の1桁に相当する．

2進法	8進法	16進法	2進法	8進法	16進法
0	0	0	1 000	10	8
1	1	1	1 001	11	9
10	2	2	1 010	12	A
11	3	3	1 011	13	B
100	4	4	1 100	14	C
101	5	5	1 101	15	D
110	6	6	1 110	16	E
111	7	7	1 111	17	F

- 2進数を16進数（8進数）に直すには4ビット（3ビット）ごとに変換するとよい．例えば，$1010\ 1011_{(2)}$ は $AB_{(16)}$.
- 16進数（8進数）を2進数に直すには1桁を4ビット（3ビット）に変換する．例えば，$273_{(8)}$ は $10\ 111\ 011_{(2)}$.

応用問題①解答例

任意の非負整数 a を任意の2以上の整数 n で整除したときの商を p_0，余りを q_0 とする．また，$p_i (i \geq 0)$を n で整除したときの商を p_{i+1}，余りを q_{i+1} とする．明らかに $0 \leq q_i < n$ ($i \geq 0$)．

任意の i について，$p_i \geq 0$ である．また，$p_i \neq 0$ ならば $p_i > p_{i+1}$，$p_i = 0$ ならば $p_{i+1} = 0$ である．ゆえに，任意の $i < m$ について $p_i > 0$ とし，かつ任意の $i \geq m$ について $p_i = 0$ とするような非負整数 m が存在する．

$a = np_0 + q_0$，$p_i = np_{i+1} + q_{i+1} (i \geq 0)$であるから，$p_0$ から順次 p_i を置換していくと，下式の通りとなる．この式より，整数 a が n 進法では，$q_m q_{m-1} \ldots q_0$ と表現されることがわかる．

$$
\begin{aligned}
a &= np_0 + q_0 \\
&= n(np_1 + q_1) + q_0 \\
&= \cdots \\
&= n(n(\cdots(n(np_m + q_m) + q_{m-1})\cdots) + q_0 \\
&= n^m q_m + n^{m-1} q_{m-1} + \cdots + nq_1 + q_0
\end{aligned}
$$

応用問題②解答例

0以上1未満の実数 a を任意の2以上の整数 n で乗じたときの積の整数部を q_1，小数部を p_1 とする．また，$p_i(i \geq 1)$を n で乗じたときの積の整数部を q_{i+1}，小数部を p_{i+1} とする．明らかに $0 \leq q_i < n$ $(i \geq 1)$．

$na = p_1 + q_1$，$np_i = p_{i+1} + q_{i+1}(i \geq 1)$，すなわち $a = p_1 / n + q_1 / n$，$p_i = p_{i+1} / n + q_{i+1} / n$ $(i \geq 1)$である．p_1 から順次 p_i を置換していくと，下式の通りとなる．この式より，実数 a が n 進法では，$0.q_1q_2q_3\ldots$ と表現されることがわかる．

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{n}p_1 + \frac{1}{n}q_1 \\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n}p_2 + \frac{1}{n}q_2) + \frac{1}{n}q_1 \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{n}q_1 + \frac{1}{n^2}q_2 + \frac{1}{n^3}q_3 + \cdots \\
&= n^{-1}q_1 + n^{-2}q_2 + n^{-3}q_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

ある自然数 m について，$p_m = 0$ ならば，任意の $i \geq m$ について $p_i = 0$ であり，実数 a は n 進有限小数となる．但し，このような m が存在することは常には保証されず，一般的には n 進無限小数となる．

応用問題③解答例

下記のとおり，無限2進小数の値を級数で表現し，その極限値を求めると10進数の 0.1 となっていることがわかる.

$$
\begin{aligned}
0.0001100110011001\cdots_{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4k}}+\frac{1}{2^{4k+1}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k}} \\
&= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^{k}} \\
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{16^{n}}\right)}{1-\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1}{10} \\
&= 0.1_{(10)}
\end{aligned}
$$