

② 電磁波: Maxwell方程式

光の波動としての基本的な性質は、Maxwellにより提出された電界と磁界に関する方程式で完全に記述できる。(古典物理学、1905年までに知られていた物理学、の粋の一つ)

○ 記号説明 (1)

電界ベクトル	electric field vector	$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	
磁界ベクトル	magnetic field vector	$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$	
電束ベクトル	electric flux vector	$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$	
磁束ベクトル	magnetic flux vector	$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	
電流密度	current density	$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	cf. 光学での多くの場合
電荷密度	charge density	$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$	$\mathbf{j} = \mathbf{0}, \rho = 0$

○ Maxwell's equations

- I $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (閉曲面を通る電束) = (内部の電荷)
 II $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (閉曲面を通る磁束) = (内部の磁荷) = 0
 III $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$ (ループをめぐり磁界の線積分) = (ループを通る電束の時間増 + 電流)
 IV $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (ループをめぐり電界の線積分) = (ループを通る磁束の時間減)

I · II Gaussの法則、III Ampère-Maxwellの法則、IV Faradayの法則

○ 保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{閉曲面を通る電流束}) = (\text{閉曲面内部の電荷の減少})$$

○ Maxwell's equations は解が一意に決まるか (1) ?

- Yes. 物理現象だから当然決まる
- No. 未知関数が12個に対して、方程式が8個しかないので決まらない?

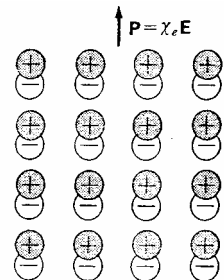
○ 経験則 (現象論)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

○ 記号説明 (2)

誘電率	(electric) permittivity	$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$	cf. 真空中では、
透磁率	magnetic permeability	$\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$	$\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$
電気感受率	electric susceptibility	$\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$	
比誘電率	relative dielectric constant	$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$	
電気分極ベクトル	electric polarization vector	$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$	
磁気分極ベクトル	magnetic polarization vector	$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$	



○ Maxwell's equations は解が一意に決まるか (2) ?

- Yes. 物理現象だから当然決まる
- No. 未知関数が12個に対してMaxwell方程式が8個で経験則から6個。式が多すぎて決まらない?

○ 経験則への補足

- 非線形光学効果

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

・ 磁気光学効果

$\mathbf{M} \neq 0$ (誘電率の異方性として記述できる)

Faraday effect: 透過光の磁場による偏光面の回転。光の進行方向と磁場の向きに依存
(偏光子と組み合わせて光スイッチングに利用)

Kerr effect: 反射光の磁場による偏光面の回転
(光磁気ディスク、MO)

○ 真空中での光波の伝搬

※ 下記は光が電磁波であることを証明するものである。 [最重要!!]

I $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

II $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

III $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

IV $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$

式IV (左辺) に左から $\nabla \times$ の操作を行うと、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$

式IV (右辺) に左から $\nabla \times$ の操作を行うと、 $-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

ゆえに、波動方程式 $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ を得る。

同様に式IIIからは、波動方程式 $\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$ を得る。

ただし $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 2.998 \times 10^8$ (m/s) は真空中での光速である。

○ 等方均質媒質(ε , μ_0)中での光波の伝搬

波動方程式は、 $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ で、 $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = \frac{c}{n}$ 。ただし、 $n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \chi}$

※ 一般には上記で十分。

しかし、更に理解を深めるためには、Maxwell's equationsに立ち戻って、誘電率が空間座標の関数 $\varepsilon(\mathbf{r})$ である場合、分極 \mathbf{P} が電場に対して非線形である場合、 $\mathbf{M} \neq 0$ の場合などを考えてみるとよい。何処にどの様な仮定が含まれており、光波を波動として扱うことに、電磁波理論の範囲内においても適用限界があることが明瞭となろう。

○ 重ね合わせの原理 (principle of superposition)

※ 最重要項目の一つだが、特に解説はしない。自信無き者は自ら調べること。

○ 1次元単色平面波 (one dimensional monochromatic plane wave) の複素数表示

・ 表示形式 $u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)]$ [ω : 角周波数, angular frequency]

$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = |A| \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\varphi) = |A| \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z) + i\varphi]$$

ここで、 \mathbf{k} は波数ベクトル (wave vector) で $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、

$U(\mathbf{r})$ は複素振幅 (complex amplitude)、 λ は波長 (wavelength)

- 3次元単色波動

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{U}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)] = \text{Re}[\mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t)]$$

- ・複素振幅ベクトル $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ が満たすべき波動方程式は、

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{U}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{ヘルムホルツ方程式 (Helmholtz equation)}]$$

$$\text{ここで、} k = |\mathbf{k}| = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0} = \frac{\omega}{v}$$

$v = \frac{\omega}{k}$ は、等位相面の伝搬速度。すなわち、位相速度 (phase velocity)

$$\text{cf. 群速度 (group velocity) は、} v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

- 均質・等方性媒質中における単色光の平面波の伝搬

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

- ・演算子の書き換え

$$\nabla \rightarrow -i\mathbf{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

等方均質媒質中でのMaxwell方程式は、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

→ (波数ベクトル) ⊥ (電界ベクトル)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0$$

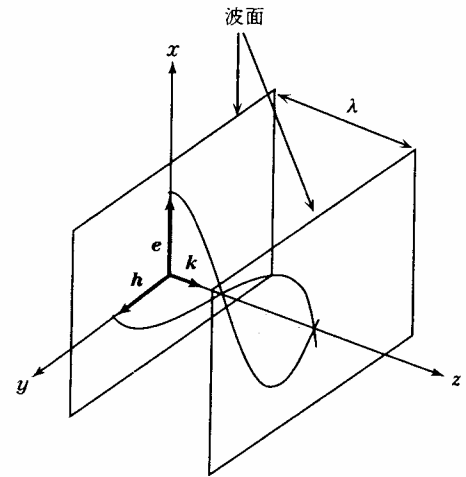
→ (波数ベクトル) ⊥ (磁界ベクトル)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\epsilon\mathbf{E}_0$$

→ (磁界ベクトル) ⊥ (電界ベクトル)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu_0\mathbf{H}_0$$

→ (磁界ベクトル) ⊥ (電界ベクトル)



cf. TEM波 (transverse electromagnetic wave) = 横波 (transverse wave)

$$\rightarrow |\mathbf{H}_0| = \frac{|\mathbf{E}_0|}{\eta}$$

波動インピーダンス (wave impedance) $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}$ 。真空中では、 $\eta_0 = 120\pi$ (Ω)

- ポインティングベクトル (poynting vector) と光強度 (optical intensity あるいは irradiance)

- ・ポインティングベクトル: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

ある時刻における単位面積あたりの電磁波のパワー流 (W/m^2)

- ・光強度: $I = \overline{|\mathbf{S}|} = \overline{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|}$ ($\overline{[\dots]}$ は時間平均を表す)

$$I = \overline{|\text{Re}(\mathbf{E}e^{i\omega t}) \times \text{Re}(\mathbf{H}e^{i\omega t})|} = \frac{1}{2} \overline{|\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)|} = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\eta}$$

cf. 光電場と光強度の関係 [重要!]

- [補足] Maxwell方程式を解くために: スカラーポテンシャル ϕ 、ベクトルポテンシャル \mathbf{A}

(参考: ファインマン物理学III電磁気学 239頁)

$$\cdot \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \because \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad \rightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \because \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

・ところで、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ 、 $\phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ としても、 \mathbf{B} と \mathbf{E} は不変。

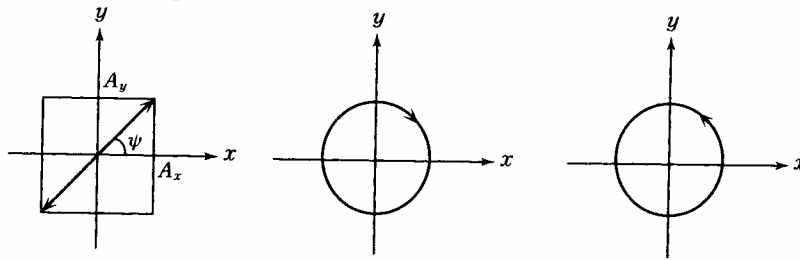
この操作を、ゲージ変換 (gauge transformation) と呼ぶ。

・そこで、適切なゲージ (Lorentz gauge) で変換しつつ、Maxwell方程式の残りの2式を変形。

$$\rightarrow \left(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_L = \mu \mathbf{j}、\left(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_L = \frac{\rho}{\epsilon}$$

cf. 多少省いているので注意。 cf. Coulomb gauge だと $\nabla \mathbf{A}_C = 0$

○ 光波の偏光 (polarization)



(a) 直線偏光 (b) 右まわり円偏光 (c) 左まわり円偏光

種々の偏光状態
光波の伝搬方向は紙面に対して上向き+z方向

直線偏光 (linearly-polarized light)

円偏光 (circularly-polarized light)

右まわり円偏光 (light-handed circularly-polarized light)

「光波の伝搬方向に沿って光波を迎えるように見たとき」時計回り

cf. 逆の定義あり (量子力学)

楕円偏光 (elliptically-polarized light)

○ 偏光子 (polarizer) ・ 検光子 (analyzer) と位相板 (phase plate) ・ 旋光板

・ 偏光フィルム、偏光プリズム、偏光ビームスプリッタ

・ $\lambda/2$ 波長板 (half-wave plate)

直線偏光の偏光面 (偏波面、plane of polarization) を変える

$\lambda/4$ 波長板 (quarter-wave plate)

直線偏光 → 右まわり円偏光 → 直線偏光 → 左まわり円偏光 → 直線偏光に

○ 境界面での反射と屈折

・ p 偏光 (p-polarized light)

入射面に電場ベクトルが並行。 [parallel (独語)]

TM波 (transverse magnetic wave)

磁場ベクトルが入射面に垂直

・ s 偏光 (s-polarized light)

入射面に電場ベクトルが垂直。 [senkrecht (独語)]

TE波 (transverse electric wave)

電場ベクトルが入射面に垂直

・ 境界条件・・・2物質の境界面に並行な方向での、電界・磁界の連続 [重要!]

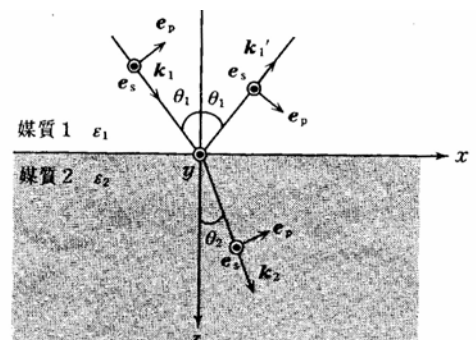
・ 入射波、反射波、屈折波の電場振幅を E_1 、 E_1' 、 E_2 、入射角 θ_1 として、

$$E_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_1 \mathbf{e}_j e^{-ik_1 \cdot \mathbf{r}} + E_1' \mathbf{e}_j e^{-ik_1' \cdot \mathbf{r}} & (z < 0) \\ E_2 \mathbf{e}_j e^{-ik_2 \cdot \mathbf{r}} & (z > 0) \end{cases} \quad (j = s, p)$$

を上記の境界条件下で解くと次の式を得る。

フレネル反射係数 (Fresnel reflection coefficient) : $r_j = E_1' / E_1$

フレネル透過係数 (Fresnel transmission coefficient) : $t_j = E_2 / E_1$



○ 反射の法則、スネルの法則 (Snell's law)

- ・ 界面 ($z=0$) において位相が入射波、反射波、屈折波の位相は一致

$$\rightarrow \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} \quad (z=0)$$

$$\rightarrow \theta_1 = \theta_1' \quad (\sin \theta_1 = \sin \theta_1') \quad [\text{反射の法則}]$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad [\text{スネルの法則}]$$

ここで屈折角 θ_2 、反射角 θ_1' で、 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_1'| = n_1 k_0$ 、 $|\mathbf{k}_2| = n_2 k_0$ の関係を用いた

○ フレネル係数 (Fresnel coefficient)

$$r_p = \frac{-n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \quad t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} (1 + r_p)$$

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = 1 + r_s$$

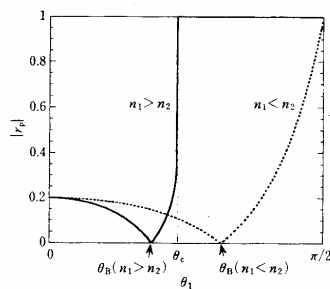
○ 反射率・透過率

- ・ 反射率 (reflectivity) $R_j = |r_j|^2 \quad (j = s, p)$

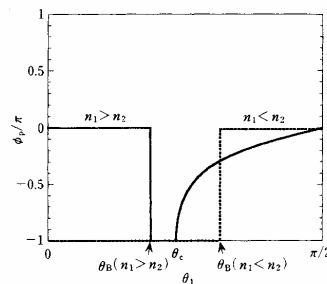
- ・ 透過率 (transmissivity) $T_j = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} |t_j|^2 \quad (j = s, p)$

cf. エネルギー保存則 $R_j + T_j = 1$

- ・ 例 1. p偏光の複素反射率 r_p の入射角 θ_1 依存

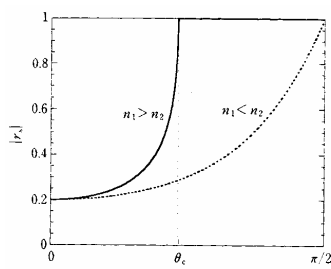


(a) 絶対値

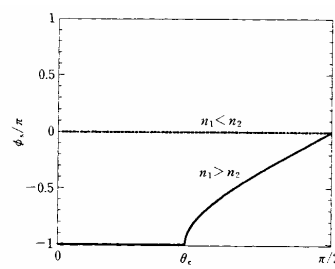


(b) 位相

- ・ 例 2. s偏光の複素反射率 r_s の入射角 θ_1 依存



(a) 絶対値



(b) 位相

○ 界面反射現象に関する幾つかの術語 (technical terms)

- ・ ブリュースタ角 (Brewster angle)

$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

- ・ 全反射 (total internal reflection) 臨界角 (critical angle) $\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1) \quad (n_2 < n_1)$

- ・ エバネッセント波 (evanescent wave)

- ・ エバネッセント波の侵入深さ (penetration depth)

$$d_p = \frac{\lambda}{2\pi n_1} \left[\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{cf.} \quad E^2 = E_0^2 \exp(-2z/d_p)$$

- 全反射現象の応用： 光ファイバー内への光の閉じこめ
- 結晶中の光波の伝搬
 - ・ 等方性媒質 (isotropic medium)
 - cf. 液体、気体、ガラス、・・・
 - ・ 異方性媒質 (anisotropic medium)
 - cf. 液晶、結晶 (方解石、石英、・・・)、・・・
 - 異方性媒質では、方向によって光の速度 (屈折率) が異なる
 - 異なる2方向へ伝搬する屈折率が現れる (複屈折, birefringence) こと有り
 - cf. 光波は必ずしも横波でなくなる
 - 電場ベクトル \mathbf{E} と分極ベクトル \mathbf{P} は平行ではない
 - 電気感受率は2階のテンソル $\tilde{\chi}$ (3×3 行列で表される)、誘電率もテンソル $\tilde{\epsilon}$ (dielectric tensor)

座標系を適切に選ぶと、最大3つの主誘電率 (principal dielectric constant) がある
同様に、主屈折率 (principal refractive index) がある (習慣的に $n_x < n_y < n_z$)

- 屈折率楕円体 (index ellipsoid)

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

任意の方向に伝搬する光波の2つの固有偏光モード (伝搬中に偏光状態が保持される偏光) とそれらの位相速度を求めることに利用

- 一軸性結晶 (uniaxial crystal, $n_x = n_y \neq n_z$) 中の光波の伝搬に関する術語
 - ・ 常屈折率 (ordinary index) $n_o (= n_x = n_y)$
 - ・ 異常屈折率 (extraordinary index) $n_e (= n_z)$
 - ・ 正の一軸性結晶 ($n_o < n_e$) と負の一軸性結晶 ($n_o > n_e$)
 - ・ 常光線 (ordinary ray) と異常光線 (extraordinary ray)

- 一軸性結晶 (uniaxial crystal, $n_x = n_y \neq n_z$) 中の光波の伝搬 $\frac{1}{n(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$

- 結晶中の光波の伝搬の重要性
波長板、偏光子、非線形光学結晶、・・・ 分光計測に有用！ 光情報処理に不可欠！