

④ 幾何光学と波動光学（復習+α）

○ 光学の体系／階層構造

- 幾何光学(geometrical optics)
- 波動光学(wave optics)
- 電磁光学(electromagnetic optics)
- 量子光学(quantum optics)

cf. X線光学、γ線光学 など、これらの範疇に馴染まないものもある。

○ 光技術の体系

- ・ 光エレクトロニクス(optoelectronics)  
物質の電子的特性を光の制御に利用したデバイスやシステムに関する技術（主に半導体）  
cf. LED（light emitting diode）、光検出器、液晶ディスプレイ
- ・ 量子エレクトロニクス(quantum electronics)  
物質と光の相互作用に基づく現象の光デバイス応用技術（主に結晶・ガラス）  
cf. laser、光周波数変換、光増幅、非線形光学デバイス
- ・ フォトニクス(photonics)  
光子の電子的・光学的制御により情報伝達・処理を行う（境界が不明確になってきた時代背景を反映して、上記の両方を含める）

◎ 幾何光学（cf. 光線近似）

- ・ 光の伝搬を光線（ray）で記述する立場 [光線 ≡ 光の波長を零にした極限]
- ・ 反射、屈折、結像、不均質媒質中や光ファイバー中の光伝搬を十分に記述

○ フェルマーの原理 (Fermat's principle)

「光線は2点間を最短時間となるように伝搬する」 → 2点A、B間を伝搬する光線について、

$$\text{屈折率 } n(\mathbf{r}) = c/v, \text{ 光路長(optical path) } L = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \text{ として、 } \delta L = 0$$

応用例. 2つの媒質（屈折率  $n_1, n_2$ ）の界面

- ・ 反射： 点A ( $x_A, y_A$ ) から点P ( $x, 0$ ) で反射して点B ( $x_B, y_B$ ) へ伝搬する光線では、

$$L = n_1|AP| + n_1|PB|$$

$$= n_1\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2} + n_1\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}$$

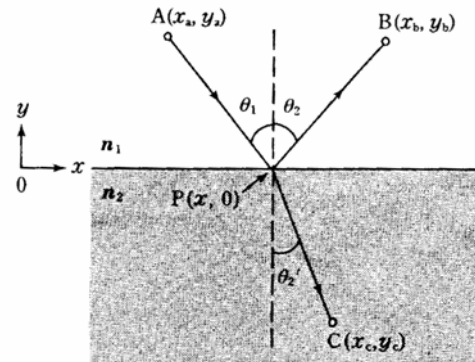
$dL/dx = 0$  より  $\theta_1 = \theta_2$  [反射の法則]

- ・ 屈折： 点A ( $x_A, y_A$ ) から点P ( $x, 0$ ) を通って点C ( $x_B, y_B$ ) へ伝搬する光線では、

$$L = n_1|AP| + n_2|PC|$$

$$= n_1\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x-x_C)^2 + y_C^2}$$

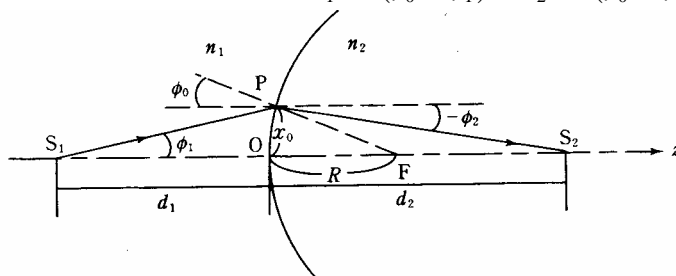
同様に、  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2'$  [スネルの法則]



○ 球面境界での光の屈折

2つの媒質の界面。それぞれの屈折率を  $n_1, n_2$ 。球面境界は半径Rの円

屈折点Pでのスネルの法則  $n_1 \sin(\phi_0 + \phi_1) = n_2 \sin(\phi_0 + \phi_2)$



- ・ 近軸近似 (paraxial approximation)  
光軸と光線のなす角  $\phi$  が十分小さく、 $\cos\phi \cong 1$ 、 $\sin\phi \cong \phi$  とできるとする  
ex.  $n_1(\phi_0 + \phi_1) = n_2(\phi_0 + \phi_2)$  (cf. 誤差1%で25° まで)  
この近似範囲内での光学が、ガウス光学 (Gaussian optics)
- ・ 近似が成り立たない場合： 収差 (abberation) が生じ、理想的な結像ができない

## ○ [参考] 術語

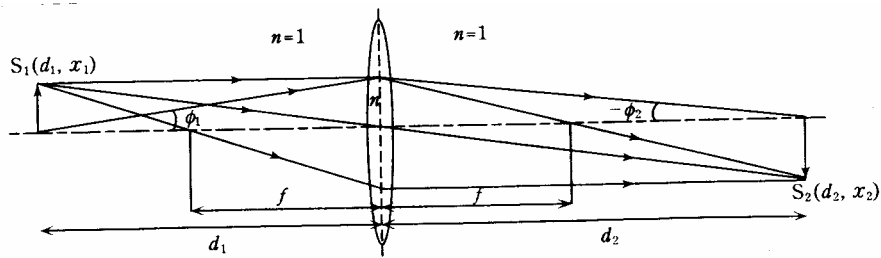
- ・ メリジナル (meridional) 面 [子午面] : 物体と光軸を含む面. タンジェンシャル面  
cf. 子午線: meridian
- ・ サジタル, (sagittal) 面 [球欠面] : メリジナル面に垂直な面

## ○ 収差: ザイデル (Seidel) の5収差+1収差

- ・ 球面収差 (spherical aberration)  
光軸上の1点から出た光線が、光軸上の一点に集まらないで前後にずれる現象
- ・ コマ収差 (coma)  
光軸から離れた点にある物体から出た光線が、サジタル平面に非対称な分布をする収差
- ・ 非点収差 (astigmatism)  
同じく離れた点から出た光線が、異なるサジタル像点とメリジナル像点を持つ現象
- ・ 像面湾曲 (curvature of field)  
光軸に垂直な物体の像の湾曲
- ・ 歪曲収差 (distortion)  
像の形状の再現性の欠陥を表す収差 (他の4収差は像の鮮鋭度を表す)  
cf. 魚眼レンズはこれを利用
- ・ 色収差 (chromatic aberration)  
屈折率が光の波長で違うことによる収差

## ○ 薄肉レンズ (thin lens)

- ・ 球面レンズ (spherical lens)



- ・ 近軸近似の下で、 $\phi_2 = \phi_1 - (n-1)(1/R_1 - 1/R_2)x_1$ 、かつ、 $\phi_1 \cong x_1/d_1$ 、 $\phi_2 \cong x_1/d_2$
- ・ 焦点距離 (focal length) を  $f_1 = (n-1)^{-1}(1/R_1 - 1/R_2)^{-1}$  とすると、  
ガウスの結像式 (Gaussian lens formula)  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$  が得られる
- ・ 像の倍率は  $M = x_2/x_1 = -d_2/d_1$  (負の符号は倒立像を意味する)

## ○ [参考] 厚肉レンズ (thick lens)

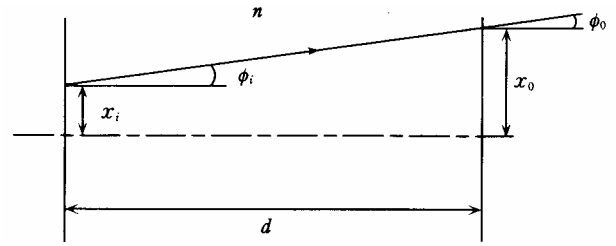
- ・ 6個の特異点 (前焦点 $F_1$ 、後焦点 $F_2$ 、前接点 $N_1$ 、後接点 $N_2$ 、物体主点 $H_1$ 、像面主点 $H_2$ ) を考えて、結像条件が得られる (後述の、光線行列を使った方が分かり易い)
- ・ なお、厚肉レンズに関する話は、光学素子メーカー (メレスグリオ、スピンドラーホイヤー、CVI、シグマ光機、他) のカタログを見ると具体的でかつ詳しい

## ○ 光線転送行列 (ray-transfer matrix)

- ・ 近軸近似は、線形変換
- ・ 右図の直進する光線に対して

$$\phi_o = \phi_i, \quad x_o = x_i + d\phi_i$$

$$\text{行列で書くと} \quad \begin{pmatrix} x_o \\ \phi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_i \end{pmatrix}$$



## 1) 平面境界での屈折

$$x_o = x_i, \quad n_o\phi_o = n_i\phi_i \quad \text{なので} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_i/n_o \end{pmatrix}$$

## 2) 球面境界： 曲率半径Rの凹面での透過と反射

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_o - n_i)/n_o R & n_i/n_o \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & n_i/n_o \end{pmatrix}$$

3) 薄肉レンズ (焦点距離  $f$ ) と厚肉レンズ (曲率  $R_1$  と  $R_2$ 、厚さ  $d$ )

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし、} \quad P_1 = (n-1)/nR_1, \quad P_2 = (1-n)/R_2$$

## 4) セルフオックレンズ (Selfoc lens)

屈折率が  $n(x) = n_0(1 - a^2 x^2 / 2)$  で与えられる媒質中では、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos az & \frac{1}{an_0} \sin az \\ -an_0 \sin az & \cos az \end{pmatrix}$$

光ファイバーやマイクロレンズに応用

## cf. 光線行列とレーザー光の伝搬

光線行列の行列要素であるガウス係数 ( $A, B, C, D$ ) は、レーザービームの伝搬解析にもそのまま利用できる。ABCD則 (ABCD rule)

## cf. 2 光線の軌跡と光線方程式 (ray equation)

光線の軌跡はアイコナル方程式 (eikonal equation)  $|\nabla S(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r})$  で表される

$s$  を光線の経路に沿った距離として、光線の経路  $\mathbf{r}(s)$  を表すのは、

$$\nabla n(\mathbf{r}) = \frac{d}{ds} \left[ n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] \quad (\text{フェルマーの定理の微分表現})$$

たとえば、セルフオックレンズの光線行列を求める時に必要

## ○ 術語

[重要!]

- ・ 開口数 (numerical aperture: NA) : 光学系の明るさや分解能を表す指標

レンズ系:  $NA = n \sin \alpha$  (光軸を中心とする円形開口の場合、 $\alpha$  は入射角の最大値)

[参考] ファイバー系:  $NA = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$  (屈折率が芯で  $n_1$ 、周囲で  $n_2 (< n_1)$  の時)

- ・ F 値 (F-value) [F ナンバー] :  $F = f/d$  ( $f$ , 焦点距離;  $d$ , 口径)

◎ 波動光学

- ・波動性によって光の性質を説明する立場
- ・ここでは、特に光波の偏光を考えないスカラー波動として、光の性質を扱う

○ 光の干渉 (interference)

- ・周波数が同一の2つの平面波  $u_1(\mathbf{r}, t)$ 、 $u_2(\mathbf{r}, t)$  の合成波  $u(\mathbf{r}, t)$  を考える

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) \\ &= |A_1| \exp[-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1)] \\ &\quad + |A_2| \exp[-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_2)] \end{aligned}$$

光強度は、

$$\begin{aligned} I &\propto |U(\mathbf{r})|^2 \\ &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2| \cos[(k_{1x} - k_{2x})x + \phi_1 - \phi_2] \end{aligned}$$

- となり、光強度パターンである干渉縞 (interference fringes) ができる
- ・干渉縞の周期  $\Lambda$  は、格子波数ベクトル (grating wave vector)  $\mathbf{K}$  の絶対値と

$$|\mathbf{K}|^2 = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| = 2\pi / \Lambda$$

の関係を持つ。また、2つの光波の交差角度を  $2\theta$ 、光波長を  $\lambda$  とすると、次の関係がある

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

○ 干渉縞の可視度 (visibility) [または、変調度 (modulation depth) ]

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2|A_1||A_2|}{|A_1|^2 + |A_2|^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

○  $N$ 個の波の重ね合わせ

- ・振幅と波数ベクトルが同一で、相対位相がそれぞれに  $\phi_0$  だけ異なる  $N$ 個の波の重ね合わせ

$$\begin{aligned} I &\propto |U(\mathbf{r})|^2 \\ &= |A|^2 \left| 1 + e^{-i\phi_0} + e^{-2i\phi_0} + e^{-3i\phi_0} + \dots + e^{-Ni\phi_0} \right|^2 \\ &= |A|^2 \frac{\sin^2(N\phi_0/2)}{\sin^2(\phi_0/2)} \end{aligned}$$

○ ファブリーペロー干渉計 (Fabry-Pérot interferometer)

- ・反射損失がある場合の無限個の波の重ね合わせ： 1回につき振幅が  $r$  ( $<1$ ) 減るとして

$$I \propto |U(\mathbf{r})|^2 = |A|^2 \left| 1 + re^{-i\phi_0} + r^2 e^{-2i\phi_0} + r^3 e^{-3i\phi_0} + \dots \right|^2 = \frac{I_{\max}}{1 + 4F^2 \pi^{-2} \sin^2(\phi_0/2)}$$

ここで、 $I_{\max} = |A|^2 / (1-r)^2$ 、 $F = \pi\sqrt{r} / (1-r)$  (フィネス: finesse)

$F$  大ほど透過光強度の波長依存大 → 超高分解能分光に利用 (分解能 ~ 数100 Hz)

○ 時空間での干渉

- ・2つの光波が異なる周波数を持つ場合、合成波を  $u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{r}, t)]$  として、

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, t) = A_1 \exp\{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})\} + A_2 \exp\{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})\}$$

○ 振幅が同じ場合 ( $A = |A_1| = |A_2|$ )

$$u(\mathbf{r}, t) = 2A \cos\left(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_m t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

ここで、 $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 、 $\mathbf{k}_0 = \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}$ 、 $\omega_m = \omega_1 - \omega_2$ 、 $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ とした

- この波は、角周波数 $\omega_0$ 、波数 $\mathbf{k}_0$ の波（搬送波：carrier）が時間と空間に依存する振幅

$$S(\mathbf{r}, t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_m t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2}{2}\right) \text{ で変調を受けて伝搬している} \text{ と見なせる}$$

- 十分に長い時間の時間平均を取れば、光強度は

$$I(\mathbf{r}, t) \propto \overline{|u(\mathbf{r}, t)|^2} = A^2 [1 + \cos(\omega_m t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2)]$$

- 合成波の光強度は、時間的にビート角周波数（beat frequency） $|\omega_m|/2\pi$ で振動する。  
このビートは、ヘテロダイン（heterodyne）検波やレーザードップラー干渉計、誘導ラマン散乱の位相整合（phase matching）に利用される

- 時間領域の干渉： 波数ベクトルが同じ（ $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ ）2つの波

$$\hat{u}(\mathbf{r}, t) = [A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)] \exp(-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$$

- 十分に長い時間の時間平均を取れば、光強度は

$$I(t) \propto \overline{|\hat{u}(\mathbf{r}, t)|^2} = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_1||A_2|[1 + \cos(\omega_m t + \phi_1 - \phi_2)]$$

- cf. 上式は、一方の波の振幅が極小でも、他方の波の振幅を大きくすることで、ビート成分の振幅を大きくできることを意味する（ヘテロダイン検波の有用性）

- 時間領域の干渉：  $N$ 個の波の重ね合わせ

- ・ 振幅、波数ベクトル、位相が同一で、相対的な周波数が一定な $N$ 個の波の重ね合わせ

$$\omega_j = \omega + (j-1)\Delta\omega \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$I \propto |U(\mathbf{r})|^2 = |A|^2 \left| 1 + e^{i\Delta\omega t} + e^{2i\Delta\omega t} + e^{3i\Delta\omega t} + \dots + e^{Ni\Delta\omega t} \right|^2 = |A|^2 \frac{\sin^2(N\Delta\omega/2)}{\sin^2(\Delta\omega/2)}$$

- ・ 周期 $T = 2\pi/\Delta\omega$ を持つパルス列となる

- cf. モードロックレーザー（mod-locked laser）による短パルス光発生の原理

- 光の可干渉性（coherence）

- ・ 干渉性の度合いのこと

- ・ 個々の原子が独立に光を放出する電球などからの光は、振幅・位相ともにランダムで、これまで取り扱ってきた無限に続く正弦波とは違う。どの程度続くのかの目安が、コヒーレンス

- ・ 2つの波の複素コヒーレンス度  $\gamma = \langle U_1^* U_2 \rangle / \sqrt{\langle |U_1|^2 \rangle \langle |U_2|^2 \rangle}$   $\langle \dots \rangle$  は集団平均。

- 干渉性に関する術語

- ・ コヒーレント（coherent）

$$|\gamma| = 1$$

- ・ インコヒーレント（incoherent）

$$|\gamma| = 0$$

- ・ 部分的にコヒーレント（partially coherent）

$$0 < |\gamma| < 1$$

- ・ コヒーレンス時間（coherence time） $\tau_c$

- ・ コヒーレンス長（coherence length） $l_c (= c\tau_c)$

- 可干渉性の測定

- ・ マイケルソン干渉計（coherent）

- ・ 可干渉性測定の原理

光路差 $2L (= 2|l_1 - l_2|)$ に対応する時間差を $\tau = 2L/c$ として

$$\gamma(\tau) = \langle U_1^*(\mathbf{r}, t) U_1(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle / \langle |U_1(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \text{ を測定}$$

- cf. これは、 $U_1(\mathbf{r}, t)$ の時間に関する自己相関関数（autocorrelation function）

## ○ 光の回折

- ・ ホイヘンス・フレネルの原理 (Huygens-Fresnel principle)  
波面の各点から、2次波源として球面波 (spherical wave) が発生して干渉し、合成された光波が次の時刻の波面を作るとする
- ・ キルヒホッフの回折理論

$$U(x, y) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_A} \frac{e^{-ikR}}{R} U_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$$

仮定： 近軸近似 & 開口 (aperture)  $\gg$  波長.

## ○ 回折積分の近似

- ・ 開口からの距離での分類

近視野領域 (near-field region)

フレネル領域 (Fresnel region)

フラウンホーファー領域

(Fraunhofer region) [または、遠視野領域 (far-field region) ]

- ・ フレネル回折 (Fresnel diffraction)

$$U(x, y) = \frac{ie^{-ikz}}{\lambda z} \iint_{S_A} \frac{e^{-ikR}}{R} U_0(\xi, \eta) \exp\left\{-\frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta$$

- ・ フラウンホーファー回折 (Fraunhofer diffraction)

$$U(x, y) = \frac{ie^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}}{\lambda z} \iint_{S_A} \frac{e^{-ikR}}{R} U_0(\xi, \eta) \exp\left\{-\frac{ik}{z}(x\xi + y\eta)\right\} d\xi d\eta$$

## ○ 円形開口からフラウンホーファー回折

半径  $b$  の円形開口  $I(r) \propto \left[ \frac{2J_1(2\pi br / \lambda z)}{(2\pi br / \lambda z)} \right]^2$

ここで、 $J_1$  は 1 次の第一種ベッセル関数

- ・ 同心円上のパターンは、エアリーパターン (Airy pattern) と呼ばれ、中心の明るい部分がエアリーディスク (Airy disk) と呼ばれる。この時の光の広がり角は、 $\theta = 0.61 \frac{\lambda}{b}$

## ○ 屈折率変調条件下の光回折

- ・ 「薄い格子」の場合： ラマン・ナス回折 (Raman-Nath diffraction)

$$\Lambda(\sin \theta_{in} - \sin \theta_{out}) = \frac{m\lambda}{n} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad Q < 1$$

- ・ 「厚い格子」の場合： ブラッグ回折 (Bragg diffraction)

$$2\Lambda \sin \theta_B = \frac{\lambda}{n} \quad (\theta_B = -\theta_{in} = \theta_{out}) \quad Q > 10$$

- ・ Qパラメータ (Q-parameter)

$$Q = \frac{2\pi\lambda d}{n\Lambda^2} \quad (d : \text{回折格子の厚さ})$$

- ・ 特徴
  - 薄い格子： 回折効率悪 (最大で 34%)、入射角に制限が無い
  - 厚い格子： 回折効率良 (100%も可能)、特定波長では特定に入射角
- cf. ホログラム記録には、0.1~100 $\mu\text{m}$  厚の感光体膜を持つ写真乾板が用いられる  
なお、通常の写真は数 10 $\mu\text{m}$